國立雲林科技大學 工業工程與管理所
National Yunlin University of Science & Technology Industrial Engineering and Management

品質與可靠度工程實驗室
Quality and Reliability Engineering Lab.

Ch5 一階反應曲面法

授課教授： 童超塵 老師

Outline

5.1 反應曲面實驗設計要求

5.2 一階反應曲面法之實驗設計

- 5.2.1 實驗設計方法：係數變異之最小化
- 5.2.2 實驗設計性質：預測變異分佈之性質
- 5.2.3 實驗設計擴充：中心點實驗

5.3 一階反應曲面法之模型建構

效果分析法與迴歸分析法

5.4 一階反應曲面法之參數優化

品質改善路徑與最陡坡度法

5.1 反應曲面實驗設計要求

- 一階反應曲面法是指以一階多項式來建立反應與品質因子間的因果模型，再以最佳化技術得到使反應最佳化的品質因子設計值。
- 一階多項式包含：

(1)一階多項式：

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots. + \beta_k x_k + \varepsilon$$

(2)具交互作用之一階多項式：

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j>i}^{k} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

- 反應曲面法的實驗設計與因子設計法的實驗設計不同，其基本要求包括：

1. 提供模型建構之實驗數據。
2. 提供模型配適性之資訊。
3. 提供純誤差之估計。
4. 允許漸進式之模型建構。
5. 對例外實驗數據不敏感。
6. 對設計水準之控制誤差具強健性。
7. 具有成本效益。
8. 允許區集實驗。
9. 提供變異均勻性之測試。
10. 提供良好的變異分佈。

5.2 一階反應曲面法之實驗設計

5.2.1 實驗設計方法：係數變異之最小化

•一階反應曲面實驗設計的目的在以最少的實驗次數，獲致最精確的一階模型。比較簡單實用的定義為「估計係數變異Var b最小的模型」。

•估計係數b的協方差Cov的公式：

$$Covb = \sigma^2 (X^{'} X)^{-1} \qquad (5\text{-}1)$$

•其中 σ^2=殘差之變異數

X=實驗數據所構成的矩陣，例如假設模型為：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

則

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{12} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11}x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21}x_{22} \\ : & : & : & : \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n1}x_{n2} \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}2)$$

其中 x_{ij} 為第i筆數據之第j個自變數之值。

而矩陣X的第一個向量為1構成之常數向量，其餘p個向量為各個因子構成之變數向量。

- 估計係數變異Var b即Cov b的對角元素，故由(5-1)式可知模型變異Var b要越小，則$(x'x)^{-1}$對角元素要越小。 $(x'x)^{-1}$對角元素要越小，則 $X'X$ 對角元素要越大，非對角元素要越接近0，此即反應曲面實驗設計的基本原理。

- 前章所提的部分因子設計正好能滿足上述要求：

(1)無交互作用一階模型：採解析度III以上設計

(2)具交互作用一階模型：採解析度V以上設計

例如一個四因子(x_1, x_2, x_3, x_4)問題要求建立一個無交互作用的一階模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$$

可採1/2部分因子設計，令 $x_4 = x_1 x_2 x_3$ 其解析度為IV ，合於解析度III以上的要求，其設計矩陣如下：

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (5\text{-}3)$$

故

$$X'X=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&-1&1&-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1&-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&-1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1&1\\1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1\\1&1&-1&1&-1\\1&-1&1&1&-1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&0&0&0\\0&8&0&0&0\\0&0&8&0&0\\0&0&0&8&0\\0&0&0&0&8\end{bmatrix}$$

$$=8\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=8\mathbf{I}_5$$

其中 I_5為5x5之單位矩陣，合於 $X'X$ 對角元素要越大，非對角元素要越接近0的要求。

讀者很容易證明 $(x'x)^{-1}=(8I_5)^{-1}=(8)^{-1}(I_5)^{-1}=(1/8)I_5$

故估計係數協方差的公式為：

$$\text{Cov }\mathbf{b}=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=\sigma^2(1/8)\mathbf{I}_5=\begin{bmatrix}\sigma^2/8&0&0&0&0\\0&\sigma^2/8&0&0&0\\0&0&\sigma^2/8&0&0\\0&0&0&\sigma^2/8&0\\0&0&0&0&\sigma^2/8\end{bmatrix} \quad (5\text{-}4)$$

因為估計係數變異Var b即估計係數協方差Cov b的對角元素，故

$$\text{Var }\mathbf{b}=\begin{Bmatrix}\sigma^2/8\\\sigma^2/8\\\sigma^2/8\\\vdots\\\sigma^2/8\end{Bmatrix} \quad (5\text{-}5)$$

5.2.2 實驗設計性質：預測變異分佈之性質

- 雖然估計係數變異Var b的最小化很重要，但還有另一個重要的實驗設計性質需考慮：**預測誤差之分佈**。
- 一般而言所謂預測變異具有合理的分佈必須滿足二點要求：

  (1)預測變異在中心點實驗處誤差最小。

  (2)距中心點實驗等距處有相等的預測變異。
- 由第二章(回歸分析)知反應平均值之信賴區間公式：

$$\hat{y}(x_0)-t_{\alpha/2,n-p}\sqrt{\hat{\sigma}^2\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0} < \mu_{y|x_0} < \hat{y}(x_0)+t_{\alpha/2,n-p}\sqrt{\hat{\sigma}^2\mathbf{x}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_0} \quad (2\text{-}46)$$

預測變異為：

$$Var\left[\hat{y}(\mathbf{x})\right]=\mathbf{x}^{(m)'}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}^{(m)}\bullet\sigma^2 \quad (5\text{-}6)$$

其中 $x^{(m)}$= 模型空間向量，以k=2之具交互作用之一階模型 $y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_{12}x_1x_2+\varepsilon$ 為例：

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{m})}=\begin{Bmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_1x_2\end{Bmatrix} \quad (5\text{-}7)$$

- 為比較實驗設計的優劣，需先排除實驗數目N與殘差之變異數σ^2之影響，故定義**正規化預測變異**如下：

$$\frac{N\times Var\hat{y}(x)}{\sigma^2}=N\mathbf{x}^{(m)'}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}^{(m)} \quad (5\text{-}8)$$

例如一四因子(x_1, x_2, x_3, x_4)問題要求建立一個無交互作用的一階模型 $y=\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\beta_3 x_3+\beta_4 x_4+\varepsilon$ 採½部分因子設計，令 $x_4 = x_1 x_2 x_3$ 故實驗數目N=8。前一小節已證明此設計

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (1/8)\mathbf{I}_5 \qquad (5\text{-}9)$$

故正規化預測變異為

$$\frac{N \times Var\hat{y}(x)}{\sigma^2} = N\mathbf{x}^{(m)'}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}^{(m)} = 8\mathbf{x}^{(m)'}((1/8)\mathbf{I}_5)\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m)'}\mathbf{I}_5\mathbf{x}^{(m)} = \mathbf{x}^{(m)'}\mathbf{x}^{(m)}$$

因$\mathbf{x}^{(m)'} = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)$，故

$$\frac{NVar\hat{y}(x)}{\sigma^2} = [1, x_1, x_2, \cdots, x_k]\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = 1 + \rho_x^2 \quad \text{其中 k=4} \qquad (5\text{-}10)$$

由上式可知，正規化預測變異在中心點實驗處，因$\rho_x = 0$故誤差最小，距中心點實驗等距處，即ρ_x相等處，有相等的正規化預測變異。並證實前節所述之一階反應曲面實驗設計其預測變異具有合理的分佈。

5.2.3 實驗設計擴充：中心點實驗

- 一階多項式模型與二階多項式模型的差異在於二階者具有平方項，這些平方項對反應的影響稱曲率效果。因此在應用一階多項式模型前，必須先分析曲率效果是否顯著。

- 一階反應曲面實驗設計並無法估計曲率效果，要估計曲率效果必須將實驗設計擴充，進行**中心點實驗**(即各品質因子的水準均設為0下之實驗)，且必須是重複實驗(一般可取3至5次)。

  其分析步驟如下：

(1)計算曲率方差和

$$SS_{Curvature} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C} \qquad (5\text{-}11)$$

其中 n_F =因子設計實驗之實驗數。

n_C =中心點實驗之實驗數。

$\bar{y}_F$ =因子設計實驗之實驗反應平均值。

$\bar{y}_C$ =中心點實驗之實驗反應平均值。

由上式可知當 $\bar{y}_F = \bar{y}_C$ 時曲率方差和=0，代表無曲率效果存在。

(2)計算誤差方差和

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n_C} (y_i - \bar{y}_C)^2 \qquad (5\text{-}12)$$

上式即在計算中心點重複實驗的純誤差方差和。

(3)計算F統計量

$$F = \frac{SS_{Curvature}/1}{SS_E/(n_C - 1)} = \frac{MS_{Curvature}}{MS_E} \qquad (5\text{-}13)$$

由上式知 F 統計量等於曲率均方差 $MS_{Curvature}$ 對誤差均方差 MS_E 的比例，因此 F 統計量大代表曲率效果顯著。透過 F 檢定即可估計曲率效果總和是否顯著：

(a)如果曲率效果不顯著，則適合使用一階模型。

(b)如果曲率效果顯著，則適合使用二階模型。

- **例題5.1中心點實驗因子設計：曲率效果估計**

一個具中心點實驗的二水準因子設計之實驗數據如下，試估計其曲率效果。

No.	x_1	x_2	x_3	y	備註
1	-1	-1	-1	46.5	因子實驗
2	1	-1	-1	68.0	因子實驗
3	-1	1	-1	74.0	因子實驗
4	1	1	-1	62.5	因子實驗
5	-1	-1	1	44.0	因子實驗
6	1	-1	1	102.0	因子實驗
7	-1	1	1	72.5	因子實驗
8	1	1	1	91.0	因子實驗
9	0	0	0	62.4	中心點實驗
10	0	0	0	72.9	中心點實驗
11	0	0	0	63.5	中心點實驗
12	0	0	0	71.9	中心點實驗

(1)計算曲率方差和

$$\bar{y}_C = (62.4+72.9+63.5+71.9)/4 = 67.675$$

$$\bar{y}_F = (46.5+68.0+74.0+62.5+44.0+102.0+72.5+91.0)/8 = 70.0625$$

$$SS_{Curvature} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C} = \frac{(8)(4)(70.0625-67.675)^2}{8+4} = 15.2$$

(2)計算誤差方差和

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n_C} (y_i - \bar{y}_C)^2$$

$$= (62.4-67.675)^2 + (72.9-67.675)^2 + (63.5-67.675)^2 + (71.9-67.675)^2 = 90.4075$$

(3)計算 F 統計量

$$F = \frac{SS_{Curvature}/1}{SS_E/(n_C-1)} = \frac{15.2/1}{90.4075/(4-1)} = 0.501$$

假設顯著水準爲 5%，查附錄 I 之 F 分佈表，分母自由度=3，分子自由度=1，得 $F_{0.05,3,1} = 10.13$，因 $F=0.501 < F_{0.05,3,1}$，故曲率效果不顯著，適合使用一階模型。

5.3 一階反應曲面法之模型建構：效果分析法與迴歸分析法

- 一階反應曲面之模型建構有二種方法：

  (1)**效果分析法**

  因二水準因子設計中，每個因子的水準值非-1即+1，因此其迴歸模型可簡單計算如下：

  常數項=因子實驗總平均值 (5-14)

  迴歸係數=1/2因子或交互作用效果 (5-15)

  (2)**迴歸分析法**

  使用第二章所提之正規的迴歸分析法

例題 5.3 一階模型之實驗設計

延續例題 3.2 半導體晶圓問題，該題採一個無重複實驗四因子二水準全因子實驗設計，其實驗設計解析度 V，可建立具交互作用一階模型。

(1)試以因子分析建立一階模型。

(2)試以迴歸分析建立一階模型。

(1) 以因子分析建立一階模型

由例題3.2知

y=70.1+(21.6/2)A+(9.9/2)C+(14.6/2)D+(-18.1/2)AC+(16.6/2)AD

=70.1+10.8A+4.95C+7.3D-9.05AC+8.3AD

(2) 以迴歸分析建立一階模型

以Excel的迴歸分析工具得圖5-1之結果，知

y=70.1+10.8A+4.94C+7.3D-9.06AC+8.3AD

(3) 結論：由此可見效果分析法與迴歸分析法之迴歸模型完全相同。圖 5-2 爲本例題迴歸模型在 D=0 之下，A 與 C 在-2.5 至+2.5 範圍之反應曲面；圖 5-3 則爲其等高線圖。

	自由度	SS	MS	F	顯著值
迴歸	10	5603.125	560.3125	21.91932	0.001634
殘差	5	127.8125	25.5625		
總和	15	5730.938			

	係數	標準誤	t 統計	P-值
截距	70.0625	1.263984	55.42988	3.61E-08
A	10.8125	1.263984	8.55429	0.00036
B	1.5625	1.263984	1.23617	0.27129
C	4.9375	1.263984	3.90629	0.01133
D	7.3125	1.263984	5.78527	0.00217
AB	0.0625	1.263984	0.04944	0.96247
AC	-9.0625	1.263984	-7.16979	0.00082
AD	8.3125	1.263984	6.57642	0.00122
BC	1.1875	1.263984	0.93949	0.39061
BD	-0.1875	1.263984	-0.14834	0.88787
CD	-0.5625	1.263984	-0.44502	0.67490

圖5-1

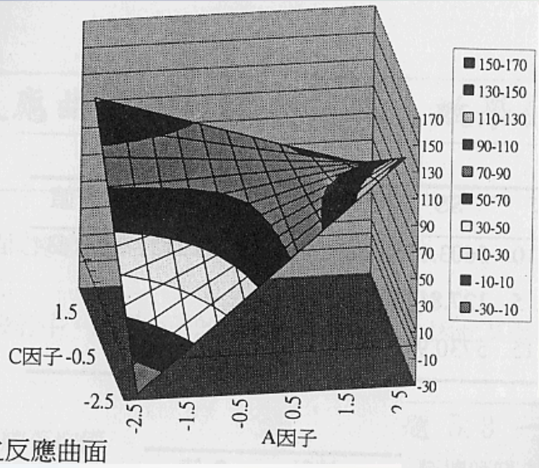

圖5-2例題5.3之反應曲面

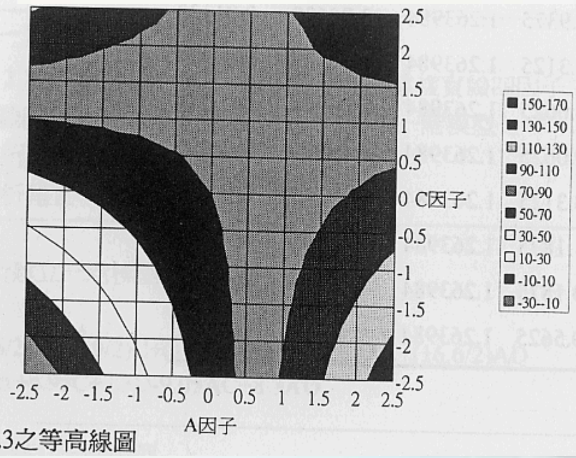

圖5-3例題5.3之等高線圖

5.4 一階反應曲面法之參數優化：品質改善路徑與最陡坡度法

- 一階模型之參數優化採用最陡坡度法程序：

  (1)建立一階模型

  (2)以具中心點因子設計偵測曲率作用，如顯著跳至步驟(6) ，否則到步驟(3)

  (3)計算品質改善路徑

  (a)計算坡度：dy/dx_i

  (b)計算增量：假設 X_i 增量=Δ，則 X_j 增量=$\Delta \bullet [(dy/dx_j)/(dy/dx_i)]$

  (c)計算新實驗點：

  望大問題 $X_i = X_i + (X_i\text{增量})$

  望小問題 $X_i = X_i - (X_i\text{增量})$

  (d)進行實驗，記錄反應實驗值。

  (e)重複(a)-(d)直到無法改善爲止。

  (4)選取品質改善路徑中反應實驗值最佳之實驗點，以此點為中心，重新設定編碼變數與自然變數的關係式，使編碼變數為0時其對應的自然變數為現行最佳解

(5)進行因子實驗設計，並實施實驗後，再重新回到步驟(1)

(6)擴充一階模型實驗設計為二階模型實驗設計，進入二階反應曲面法程序(參考第6至第8章)

步驟(4)的重新設定編碼變數與自然變數的關係式，可舉一例：假設自然變數目前的現行最佳解爲 86.5，如果估計其最佳解的範圍約爲±30，則可令實驗範圍爲

下限值 86.5-30= 56.5

上限值 86.5+30= 116.5

$$編碼變數=\frac{自然變數-56.5}{30}-1$$

如此一來，自然變數56.5會被映射到編碼變數-1；自然變數116.5會被映射到編碼變數+1。

例題 5.4 一階模型之參數優化

延續例題 5.3 半導體晶圓問題，試求品質改善路徑。

(1)建立一階模型

由例題 5.3 知

y=70.1+10.8A+4.94C+7.3D-9.06AC+8.3AD

令 A=x_1，C=x_2，D=x_3，改寫上式爲

$y=70.1+10.8x_1+4.94x_2+7.3x_3-9.06x_1x_2+8.3x_1x_3$

(2)以具中心點因子設計偵測曲率作用

假設四次中心點(x_1=0，x_2=0，x_3=0)實驗的反應爲 62.4，72.9，63.5，71.9

(a)計算曲率方差和

$\bar{y}_C$=(62.4+72.9+63.5+71.9)/4=67.675

$\bar{y}_F$=(46.5+68.0+74.0+62.5+44.0+102.0+72.5+91.0)/8=70.0625

$$SS_{Curvature}=\frac{n_F n_C(\bar{y}_F-\bar{y}_C)^2}{n_F+n_C}=\frac{(8)(4)(70.0625-67.675)^2}{8+4}=15.2$$

(b)計算誤差方差和

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n_C}(y_i - \bar{y}_C)^2$$

$=(62.4-67.675)^2+(72.9-67.675)^2+(63.5-67.675)^2+(71.9-67.675)^2=90.4075$

(c)計算 F 統計量

$$F = \frac{SS_{Curvature}/1}{SS_E/(n_C-1)} = \frac{15.2/1}{90.4075/(4-1)} = 0.501$$

曲率效果不顯著，適合使用一階模型。

(3)計算品質改善路徑

假設x_1增量$=\Delta=0.5$

第 1 個實驗點爲中心點$(x_1，x_2，x_3) = (0，0，0)$

y 預測值$= 70.1+10.8 x_1+4.94 x_2+7.3 x_3-9.06x_1x_2+8.3 x_1x_3$

$= 70.1+10.8(0)+4.94(0)+7.3(0)-9.06(0)(0)+8.3(0)(0)$

$= 70.1$

y 實驗值=65.6 (假設)

第 2 個實驗點之計算：

現行實驗點$(x_1，x_2，x_3) = (0，0，0)$

(a)計算坡度：

$dy/dx_1=10.81-9.06 x_2+8.31 x_3=10.81$

$dy/dx_2=4.94-9.06 x_1=4.94$

$dy/dx_3=7.31+8.31 x_1=7.31$

(b)計算增量：

x_1 增量$=\Delta=0.5$，

x_2 增量$=\Delta\bullet [(dy/dx_2)/(dy/dx_1)]=0.5\bullet (4.94/10.81)=0.23$

x_3 增量$=\Delta\bullet [(dy/dx_3)/(dy/dx_1)]=0.5\bullet (7.31/10.81)=0.34$

(c)計算新實驗點：

$x_1 =x_1+ (x_1$ 增量$)=0+0.5=0.5$

$x_2 =x_2+ (x_2$ 增量$)=0+0.23=0.23$

$x_3 =x_3+ (x_3$ 增量$)=0+0.34=0.34$

(d)進行實驗

y 預測值= $70.1+10.8\ x_1+4.94\ x_2+7.3\ x_3-9.06x_1x_2+8.3\ x_1x_3$

$= 70.1+10.8(0.5)+4.94(0.23)+7.3(0.34)-9.06(0.5)(0.23)+8.3(0.5)(0.34)$

$= 79.5$

y 實驗值=83.5 (假設)

由於 y 實驗值確實比前一個實驗點之實驗值(65.6)高，故可繼續計算品質改善路徑。

第 3 個實驗點之計算：

現行實驗點(x_1，x_2，x_3) = (0.5，0.23，0.34)

(a)計算坡度：

$dy/dx_1=10.81-9.06\ x_2+8.31\ x_3=11.55$

$dy/dx_2=4.94-9.06\ x_1=0.41$

$dy/dx_3=7.31+8.31\ x_1=11.47$

(b)計算增量：

x_1 增量=Δ=0.5，

x_2 增量=Δ• [(dy/dx₂)/(dy/dx₁)]=0.02

x_3 增量=Δ• [(dy/dx₃)/(dy/dx₁)]=0.50

(c)計算新實驗點：

$x_1 = x_1 +$ (x_1 增量)=0.5+0.5=1.0

$x_2 = x_2 +$ (x_2 增量)=0.23+0.02=0.25

$x_3 = x_3 +$ (x_3 增量)=0.34+0.5=0.84

(d)進行實驗

y 預測值= $70.1+10.8\ x_1+4.94\ x_2+7.3\ x_3-9.06x_1x_2+8.3\ x_1x_3$

$= 70.1+10.8(1.0)+4.94(0.25)+7.3(0.84)-9.06(1.0)(0.25)+8.3(1.0)(0.84)$

$= 93.0$

y 實驗值=87.6 (假設)

由於 y 實驗值確實比前一個實驗點之實驗值(83.5)高，故可繼續計算品質改善路徑。

第 4 個實驗點之計算：

現行實驗點(x_1，x_2，x_3) = (1.0，0.25，0.84)

(a)計算坡度：

$dy/dx_1=10.81-9.06\ x_2+8.31\ x_3=15.53$

$dy/dx_2=4.94-9.06\ x_1=-4.12$

$dy/dx_3=7.31+8.31\ x_1=15.62$

(b)計算增量：

x_1 增量=Δ=0.5，

x_2 增量=Δ• [(dy/dx_2)/(dy/dx_1)]=-0.13

x_3 增量=Δ• [(dy/dx_3)/(dy/dx_1)]=0.50

(c)計算新實驗點：

x_1 =x_1+ (x_1 增量)=1.0+0.5=1.5

x_2 =x_2+ (x_2 增量)=0.25-0.13=0.12

x_3 =x_3+ (x_3 增量)=0.84+0.5=1.34

(d)進行實驗

y 預測值= $70.1+10.8\,x_1+4.94\,x_2+7.3\,x_3-9.06x_1x_2+8.3\,x_1x_3$

$= 70.1+10.8(1.5)+4.94(0.12)+7.3(1.34)-9.06(1.5)(0.12)+8.3(1.5)(1.34)$

$= 111.7$

y 實驗值=87.0 (假設)

由於 y 實驗值不比前一個實驗點之實驗值(87.6)高，故可停止計算品質改善路徑。但為了確認，也可再進行一次計算(第 5 個實驗點)。

第 5 個實驗點之計算

現行實驗點(x_1，x_2，x_3) = (1.5，0.12，1.34)

(a)計算坡度：

dy/dx_1=10.81-9.06 x_2+8.31 x_3=20.86

dy/dx_2=4.94-9.06 x_1=-8.65

dy/dx_3=7.31+8.31 x_1=19.78

(b)計算增量：

x_1 增量=Δ=0.5

x_2 增量=Δ• [(dy/dx_2)/(dy/dx_1)]=-0.41

x_3 增量=Δ• [(dy/dx_3)/(dy/dx_1)]=0.47

(c)計算新實驗點：

x_1 =x_1+ (x_1 增量)=1.5+0.5=2.0

x_2 =x_2+ (x_2 增量)=0.12-0.41=-0.29

x_3 =x_3+ (x_3 增量)=0.84+0.5=1.81

(d)進行實驗

y 預測值= 70.1+10.8 x_1+4.94 x_2+7.3 x_3-9.06x_1x_2+8.3x_1x_3

= 70.1+10.8(2.0)+4.94(-0.29)+7.3(1.81)-9.06(2.0)(-0.29)+8.3(2.0)(1.81)

= 136.2

y 實驗值=70.6 (假設)

由於 y 實驗值又比前一個實驗點之實驗值(87.0)低，故可確認第 3 個實驗點為最佳設計，應停止計算品質改善路徑。

這五次的實驗值整理如下：

	x_1	x_2	x_3	y 預測值	y 實驗值	誤差
1	0	0	0	70.1	65.6	4.4
2	0.5	0.23	0.34	79.5	83.5	-4.1
3	1.0	0.25	0.84	93.0	87.6	5.4
4	1.5	0.12	1.34	111.7	87.0	24.7
5	2.0	-0.29	1.81	136.2	70.6	68.2

反應預測值與實驗值如圖 5-4 所示。由表可知到第 4 與第 5 個實驗點反應實驗值反而下降，已無法改善反應，故此路徑之最佳設計為第 3 個實驗點(x_1，x_2，x_3) = (1.0，0.25，0.84)

(4)選取最佳設計(x_1，x_2，x_3) = (1.0，0.25，0.84)，以此為中心點，重新設定編碼變數與自然變數的關係式，使編碼變數為 0 時其對應的自然變數為現行最佳解。

(5)進行因子實驗設計，並實施實驗後，再重新回到步驟(1)。

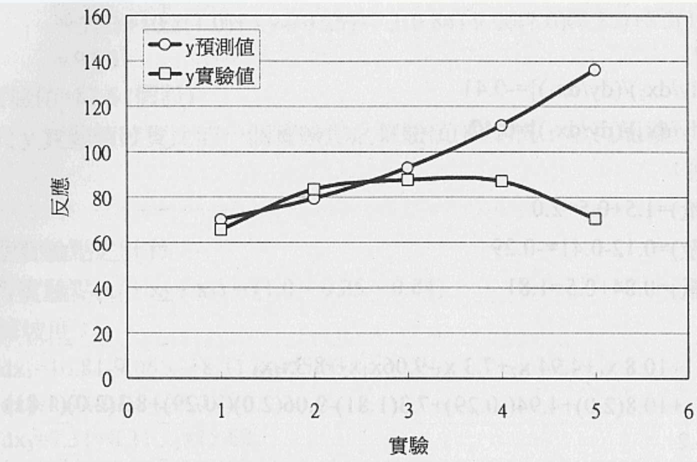

圖5-4例題5.4之反應預測值與實驗值

THE END